आदर्श प्रश्न पत्र सम्पूर्ण समाधान

विषय: गणित | कक्षा: 10वीं | सत्र: 2026-2027

शिक्षक का संदेश: *प्रिय विद्यार्थियों, गणित एक अत्यंत तार्किक विषय है। इस पीडीएफ में प्रत्येक प्रश्न को बिल्कुल* ***क्रमवार (Step-by-Step)*** *हल किया गया है। दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों को विस्तृत रूप से समझाया गया है। परीक्षा में भी इसी प्रकार हर स्टेप लिखकर आएं, आपको पूरे अंक प्राप्त होंगे!*

खंड - A (बहुविकल्पीय प्रश्न - 1 अंक)

प्रश्न 1: 96 और 404 का HCF 96m - 404m के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो HCF है:

(a) 2 (b) 4

(c) 8 (d) 12

उत्तर: **(b) 4**

∵ 96 के अभाज्य गुणनखंड $= 2^5 \times 3$

$\Rightarrow$ 404 के अभाज्य गुणनखंड $= 2^2 \times 101$

$\therefore$ HCF $(96, 404) = 2^2 =$

$\Rightarrow$ 4

प्रश्न 2: यदि बहुपद $x^2 - 5x + 6$ में एक शून्यक 2 हो, तो दूसरा शून्यक होगा:

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 6

उत्तर: **(c) 3**

∵ बहुपद: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

⇒ $(x - 2)(x - 3) = 0$

∴ अतः, शून्यक $x = 2$ और $x =$

⇒ **3**

हैं।

प्रश्न 3: 'k' के किस मान के लिए समीकरण के युग्म $2x + 3y = 7$ और $4x + ky = 14$ के अनंत हल होंगें?

(a) 3 (b) 6

(c) 7 (d) 14

उत्तर: **(b) 6**

∵ अनंत हल के लिए शर्त: $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$

⇒ यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 7$

⇒ और $a_2 = 4, b_2 = k, c_2 = 14$

⇒ मान रखने पर: $2/4 = 3/k = 7/14$

⇒ $1/2 = 3/k$

∴ $k = 2 \times 3 =$

⇒ **6**

प्रश्न 4: समीकरण $x^2 - 6x + 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति है :

(a) वास्तविक और असमान (b) काल्पनिक

(c) वास्तविक एवं समान (d) निर्धारित नहीं किया जा सकता

उत्तर: **(c) वास्तविक एवं समान**

∵ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर: $a=1, b=-6, c=9$

⇒ विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

⇒ $D = (-6)^2 - 4(1)(9)$

⇒ $D = 36 - 36 = 0$

∴ चूँकि $D = 0$ है, इसलिए मूल

⇒ **वास्तविक एवं समान**

होंगे।

प्रश्न 5: समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ के मूल हैं:

(a) -3, -10

(b) -2, 5

(c) 6

(d) 7

उत्तर: (b) -2, 5

∵ समीकरण: $x^2 - 3x - 10 = 0$

⇒ $x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

⇒ $x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$

⇒ $(x + 2)(x - 5) = 0$

∴ $x =$

⇒ **-2, 5**

प्रश्न 6: एक AP में 11वाँ पद 38 तथा 16वाँ पद 73 है, सार्व अंतर d ज्ञात कीजिए:

(a) 4 (b) 5

(c) 6 (d) 7

उत्तर: **(d) 7**

∵ $a_{11} = a + 10d = 38$ ... (समीकरण 1)

⇒ $a_{16} = a + 15d = 73$ ... (समीकरण 2)

⇒ समीकरण 2 में से 1 को घटाने पर:

⇒ $(a + 15d) - (a + 10d) = 73 - 38$

⇒ $5d = 35$

∴ $d = 35 / 5 =$

⇒ **7**

प्रश्न 7: बिंदुओं (3, 4) तथा (3, -2) के बीच की दूरी है:

(a) 5 unit (b) 6 unit

(c) 7 unit (d) 8 unit

उत्तर: **(b) 6 unit**

∵ दूरी सूत्र: $d = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

⇒ $d = \sqrt{[(3 - 3)^2 + (-2 - 4)^2]}$

⇒ $d = \sqrt{[0^2 + (-6)^2]} = \sqrt{[36]}$

∴ $d =$

⇒ **6 unit**

प्रश्न 8: वह बिंदु जो y-अक्ष पर स्थित है:

(a) (5, 0)

(b) (0, -3)

(c) (2, 2)

(d) (4, 1)

उत्तर: **(b) (0, -3)**

∵ y-अक्ष पर स्थित किसी भी बिंदु का भुज (x-निर्देशांक) हमेशा शून्य (0) होता है।

⇒ दिए गए विकल्पों में केवल (0, -3) का x-निर्देशांक 0 है।

∴ अतः सही विकल्प

⇒ **(0, -3)**

है।

प्रश्न 9: यदि sin θ = 1/2 तथा θ न्यून कोण है, तो θ का मान होगा:

(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 90°

उत्तर: **(a) 30°**

∵ दिया गया है: $\sin \theta = 1/2$

⇒ सारणी के अनुसार, $\sin 30° = 1/2$ होता है।

∴ अतः $\theta =$

⇒ **30°**

प्रश्न 10: वृत्त के किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा होती है:

(a) त्रिज्या के समानांतर

(b) त्रिज्या के बराबर

(c) त्रिज्या पर लंब

(d) त्रिज्या की दुगुनी

उत्तर: (c) त्रिज्या पर लंब

∵ प्रमेय 10.1: वृत्त के किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब (90°) होती है।

∴ विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 11: 14 cm त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि है:

(a) 44 cm

(b) 66 cm

(c) 88 cm

(d) 176 cm

उत्तर: (c) 88 cm

∵ वृत्त की परिधि = $2\pi r$

⇒ परिधि = $2 \times (22/7) \times 14$

⇒ परिधि = $2 \times 22 \times 2$

∴ परिधि =

⇒ **88 cm**

प्रश्न 12: 10, 14 तथा 18 का माध्य है:

(a) 12

(b) 13

(c) 14

(d) 15

उत्तर: (c) 14

∵ माध्य = प्रेक्षणों का योग / प्रेक्षणों की संख्या

⇒ माध्य = $(10 + 14 + 18) / 3$

⇒ माध्य = $42 / 3$

∴ माध्य =

⇒ **14**

प्रश्न 13: किसी आँकड़ा समूह में सबसे अधिक बार आने वाले मान को क्या कहते हैं?

(a) माध्य

(b) माध्यिका

(c) बहुलक

(d) परिसर

उत्तर: **(c) बहुलक**

∵ सांख्यिकी में, जिस प्रेक्षण की बारंबारता सबसे अधिक होती है, उसे बहुलक कहा जाता है।

प्रश्न 14: 52 ताश के पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। तस्वीर वाला पत्ता आने की प्रायिकता है:

(a) 3/13

(b) 1/13

(c) 1/4

(d) 9/52

उत्तर: **(a) 3/13**

∵ कुल संभावित परिणाम = 52

⇒ कुल तस्वीर वाले पत्ते (J, Q, K) = 4 सूट × 3 पत्ते = 12

⇒ P(E) = 12 / 52

∴ P(E) =

⇒ **3 / 13**

प्रश्न 15: आकृति में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएं इस प्रकार हैं कि ∠POQ = 110° तो ∠PTQ बराबर है:

(a) 60°

(b) 70°

(c) 80°

(d) 90°

उत्तर: **(b) 70°**

∵ बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाओं और त्रिज्याओं के बीच बने कोण संपूरक होते हैं।

⇒ $\angle POQ + \angle PTQ = 180°$

⇒ $110° + \angle PTQ = 180°$

∴ $\angle PTQ =$

⇒ **70°**

प्रश्न 16: दी गई आकृति में शंकु की त्रिज्या 3 cm तथा ऊँचाई 4 cm है। आकृति में "L" (तिर्यक ऊँचाई) ज्ञात करें:

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

उत्तर: **(c) 5**

∵ तिर्यक ऊँचाई $L = \sqrt{[r^2 + h^2]}$

⇒ $L = \sqrt{[3^2 + 4^2]}$

⇒ $L = \sqrt{[9 + 16]} = \sqrt{25}$

∴ $L =$

⇒ **5 cm**

खंड - B (अति लघु उत्तरीय प्रश्न - 2 अंक)

प्रश्न संख्या 17 (a) और 17 (b) अभिकथन-कारण पर आधारित हैं।

प्रश्न 17 (a):
अभिकथन (A): समकोण त्रिभुज में sin θ = लंब / कर्ण
कारण (R): कर्ण वह भुजा है जो समकोण के सामने होती है।

उत्तर: **(b) दोनों A और R सत्य हैं, परंतु R, A की सही व्याख्या नहीं है।**

∵ अभिकथन A सत्य है (त्रिकोणमिति सूत्र)।

⇒ कारण R भी सत्य है (कर्ण की परिभाषा)।

∴ किन्तु R यह नहीं समझाता कि $\sin\theta$ का सूत्र लंब/कर्ण क्यों होता है, अतः यह सही व्याख्या नहीं है।

प्रश्न 17 (b):

अभिकथन (A): वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या के लंबवत होती है।

कारण (R): स्पर्श रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है।

उत्तर: **(b) दोनों A और R सत्य हैं, परंतु R, A की सही व्याख्या नहीं है।**

∵ अभिकथन A सत्य है (प्रमेय 10.1)।

⇒ कारण R भी सत्य है।

∴ किन्तु लंबवत होने का मुख्य कारण "न्यूनतम दूरी" है, अतः R सही व्याख्या नहीं है।

प्रश्न 18: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर:

∵ माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

⇒ इसलिए, $\sqrt{3} = p/q$ (जहाँ p और q सह-अभाज्य पूर्णांक हैं, और $q \neq 0$)

⇒ दोनों पक्षों का वर्ग करने पर:

⇒ $3 = p^2 / q^2$

⇒ ⇒ $p^2 = 3q^2$ ... (समीकरण 1)

⇒ चूँकि $3q^2$, 3 से विभाजित होता है, अतः p^2 भी 3 से विभाजित होगा।

⇒ इसलिए, p भी 3 से विभाजित होगा।

⇒ अब माना $p = 3k$ (जहाँ k कोई पूर्णांक है)

⇒ समीकरण 1 में p का मान रखने पर:

⇒ $(3k)^2 = 3q^2$

⇒ $9k^2 = 3q^2$

⇒ ⇒ $q^2 = 3k^2$

⇒ इसका अर्थ है कि q^2 भी 3 से विभाजित होगा, अतः q भी 3 से विभाजित होगा।

⇒ चूँकि p और q दोनों 3 से विभाजित होते हैं, अतः इनमें कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है।

⇒ यह इस तथ्य का विरोधाभास है कि p और q सह-अभाज्य हैं।

∴ अतः हमारी कल्पना गलत है, और

⇒ **√3 एक अपरिमेय संख्या है।**

प्रश्न 19: रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

2x + 3y = 9

4x + 6y = 18

उत्तर:

∵ समीकरण 1: 2x + 3y = 9

⇒ समीकरण 2: 4x + 6y = 18

⇒ समीकरण 1 से x का मान निकालने पर:

⇒ 2x = 9 - 3y

⇒ x = (9 - 3y) / 2 ... (समीकरण 3)

⇒ समीकरण 3 से x का मान समीकरण 2 में प्रतिस्थापित करने पर:

⇒ 4[(9 - 3y) / 2] + 6y = 18

⇒ 2(9 - 3y) + 6y = 18

⇒ 18 - 6y + 6y = 18

⇒ 18 = 18

⇒ यहाँ चर (Variable) y कट गया है और यह कथन सत्य है।

∴ अतः इस समीकरण युग्म के

⇒ **अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।**

अथवा (OR) प्रश्न 19: रैखिक समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए:

2x + 3y = 8

4x + 6y = 7

उत्तर:

∵ समीकरण 1: 2x + 3y = 8

⇒ समीकरण 2: 4x + 6y = 7

⇒ समीकरण 1 को 2 से गुणा करने पर:

⇒ 4x + 6y = 16 ... (समीकरण 3)

⇒ समीकरण 3 में से समीकरण 2 को घटाने पर:

⇒ (4x + 6y) - (4x + 6y) = 16 - 7

⇒ 0 = 9

⇒ यह एक असत्य कथन है।

∴ अतः रेखाएँ समानांतर हैं और इसका

⇒ **कोई हल नहीं है।**

प्रश्न 20: 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ AP: 8, 16, 24, ..., (15 पदों तक)

⇒ प्रथम पद (a) = 8

⇒ सार्व अंतर (d) = 8

⇒ पदों की संख्या (n) = 15

⇒ योग सूत्र: $S_n = (n/2) [2a + (n-1)d]$

⇒ $S_{15} = (15/2) [2(8) + (14)8]$

⇒ $S_{15} = (15/2) [16 + 112]$

⇒ $S_{15} = (15/2) [128]$

⇒ $S_{15} = 15 \times 64$

∴ S_{15} =

⇒ **960**

प्रश्न 21: आकृति में, DE || BC. AD ज्ञात कीजिए। (DB = 7.2 cm, AE = 1.8 cm, EC = 5.4 cm)

उत्तर:

∵ चूँकि ΔABC में, DE || BC

⇒ BPT से: AD / DB = AE / EC

⇒ AD / 7.2 = 1.8 / 5.4

⇒ AD / 7.2 = 1 / 3

⇒ AD = 7.2 / 3

∴ AD =

⇒ **2.4 cm**

प्रश्न 22: यदि 15 cot A = 8 हो, तो sin A और sec A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ 15 cot A = 8 ⇒ cot A = 8 / 15

⇒ cot A = आधार / लंब

⇒ माना आधार = 8k और लंब = 15k

⇒ पाइथागोरस प्रमेय से:

⇒ $(\text{कर्ण})^2 = (\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2$

⇒ $(\text{कर्ण})^2 = (15k)^2 + (8k)^2$

⇒ $(\text{कर्ण})^2 = 225k^2 + 64k^2 = 289k^2$

⇒ कर्ण = 17k

⇒ sin A = लंब / कर्ण = 15k / 17k =

⇒ **15 / 17**

∴ sec A = कर्ण / आधार = 17k / 8k =

⇒ **17 / 8**

अथवा (OR) प्रश्न 22: मान ज्ञात कीजिए: $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

उत्तर:

∵ सारणी से मान: tan 45° = 1, cos 30° = √3/2, sin 60° = √3/2

⇒ व्यंजक: $2(1)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 - (\sqrt{3}/2)^2$

⇒ ⇒ 2(1) + (3/4) - (3/4)

⇒ ⇒ 2 + 0

∴ उत्तर =

⇒ **2**

प्रश्न 23: एक वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 14 m है। रजनी पार्क की सीमा के चारों ओर दो चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ त्रिज्या (r) = 14 m

⇒ एक चक्कर की दूरी = वृत्त की परिधि = $2\pi r$

⇒ $= 2 \times (22/7) \times 14 = 88$ m

⇒ कुल तय की गई दूरी = 2 चक्कर × 88 m

∴ कुल दूरी =

⇒ **176 m**

प्रश्न 24: एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 cm है।

उत्तर:

∵ वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 22$

⇒ $2 \times (22/7) \times r = 22$

⇒ $r = (22 \times 7) / 44 = 7/2$ cm

⇒ चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= (1/4) \times \pi r^2$

⇒ $= (1/4) \times (22/7) \times (7/2) \times (7/2)$

⇒ $= (1/4) \times 77/2 = 77/8$ cm^2

∴ क्षेत्रफल =

⇒ **9.625 cm^2**

प्रश्न 25: एक पासे को एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिएः (i) एक अभाज्य संख्या (ii) एक विषम संख्या

उत्तर:

∵ कुल संभावित परिणाम = {1, 2, 3, 4, 5, 6} (कुल 6)

⇒ **(i) अभाज्य संख्या:**

⇒ अनुकूल परिणाम = {2, 3, 5} (कुल 3)

⇒ P(अभाज्य संख्या) = 3 / 6 = **1 / 2**

⇒ **(ii) विषम संख्या:**

⇒ अनुकूल परिणाम = {1, 3, 5} (कुल 3)

⇒ P(विषम संख्या) = 3 / 6 = **1 / 2**

∴ अतः दोनों की प्रायिकता

⇒ **1/2**

है।

प्रश्न 26: एक गोले और एक घन का आयतन समान है। यदि गोले का व्यास 6 सेमी है, तो घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ गोले का व्यास = 6 cm ⇒ त्रिज्या (r) = 3 cm

⇒ गोले का आयतन = $(4/3)\pi r^3 = (4/3) \times \pi \times 27 = 36\pi$ cm^3

⇒ घन का आयतन = गोले का आयतन

⇒ $a^3 = 36\pi$

∴ अतः घन की भुजा (a) =

⇒ **√[3](36π) cm**

खंड - C (लघु उत्तरीय प्रश्न - 3 अंक)

प्रश्न 27: बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यक तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।

उत्तर:

∵ **1. शून्यक ज्ञात करना:**

⇒ $p(x) = x^2 - 3 = 0$

⇒ $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

⇒ शून्यक $\alpha = \sqrt{3}$ और $\beta = -\sqrt{3}$

⇒ **2. सत्यता की जांच:**

⇒ $ax^2 + bx + c$ से तुलना: $a = 1, b = 0, c = -3$

⇒ शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

⇒ सूत्र: $-b/a = -0/1 = 0$ (सत्यापित)

⇒ शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3$

⇒ सूत्र: $c/a = -3 / 1 = -3$ (सत्यापित)

∴

⇒ **अतः संबंध सत्य है।**

प्रश्न 28: ग्राफ़ द्वारा जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म $x + 3y = 6$; $2x - 3y = 12$ संगत है या नहीं। यदि ऐसा है, तो उन्हें ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए।

उत्तर:

∵ समीकरण 1: $x + 3y = 6 \Rightarrow a_1=1, b_1=3, c_1=-6$

⇒ समीकरण 2: $2x - 3y = 12 \Rightarrow a_2=2, b_2=-3, c_2=-12$

⇒ $a_1/a_2 = 1/2$

⇒ $b_1/b_2 = 3/-3 = -1$

⇒ चूँकि $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$, अतः यह युग्म **संगत** है।

⇒ **ग्राफ के निर्देशांक:**

⇒ $x + 3y = 6$ के लिए: बिंदु A(6, 0) और B(0, 2)

⇒ $2x - 3y = 12$ के लिए: बिंदु C(6, 0) और D(0, -4)

∴ दोनों रेखाएँ बिंदु (6, 0) पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः हल

⇒ **$x = 6, y = 0$**

है।

प्रश्न 29: द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए: $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

उत्तर:

∵ यहाँ $a = 3, b = -2\sqrt{6}, c = 2$

⇒ विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

⇒ $D = (-2\sqrt{6})^2 - 4(3)(2)$

⇒ $D = (4 \times 6) - 24 = 24 - 24 = 0$

⇒ चूँकि $D = 0$, मूल वास्तविक और समान होंगे।

⇒ मूल $x = -b / 2a$

⇒ $x = -(-2\sqrt{6}) / 6 = 2\sqrt{6} / 6 = \sqrt{6} / 3$

⇒ $x = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = \sqrt{2} / \sqrt{3}$

∴ मूल

⇒ **$\sqrt{(2/3)}$ और $\sqrt{(2/3)}$**

हैं।

अथवा (OR) प्रश्न 29: $Kx(x - 2) + 6 = 0$ में K का मान ज्ञात कीजिए ताकि दो बराबर मूल हों।

उत्तर:

∵ विस्तार: $Kx^2 - 2Kx + 6 = 0$

⇒ यहाँ $a = K, b = -2K, c = 6$

⇒ समान मूलों की शर्त: $D = b^2 - 4ac = 0$

⇒ $(-2K)^2 - 4(K)(6) = 0$

⇒ $4K^2 - 24K = 0$

⇒ $4K(K - 6) = 0$

⇒ $K = 0$ या $K = 6$

⇒ ($K = 0$ संभव नहीं है क्योंकि तब यह द्विघात समीकरण नहीं रहेगा)

∴ अतः

⇒ **$K = 6$**

प्रश्न 30: एक थिएटर की पंक्ति में सीटें 20, 24, 28... हैं। 10वीं पंक्ति में सीटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ AP: 20, 24, 28, ...

⇒ प्रथम पद $a = 20$, सार्व अंतर $d = 4$, $n = 10$

⇒ $a_n = a + (n - 1)d$

⇒ $a_{10} = 20 + (10 - 1) \times 4$

⇒ $a_{10} = 20 + 36$

∴ $a_{10} =$

⇒ **56**

प्रश्न 31: ΔODC ~ ΔOBA, ∠BOC = 125° और ∠CDO = 70° है। ∠DOC, ∠DCO और ∠OAB ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ **1. ∠DOC:**

⇒ DOB एक सरल रेखा है (रैखिक युग्म):

⇒ ∠DOC + 125° = 180°

⇒ ∠DOC = 180° - 125° = **55°**

∵ **2. ∠DCO:**

⇒ ΔODC में: ∠CDO + ∠DOC + ∠DCO = 180°

⇒ 70° + 55° + ∠DCO = 180°

⇒ ∠DCO = 180° - 125° = **55°**

∵ **3. ∠OAB:**

⇒ ΔODC ~ ΔOBA (दिया है)

⇒ समरूप त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं: ∠OAB = ∠OCD

∴ अतः ∠OAB =

⇒ **55°**

प्रश्न 32: सिद्ध करें: (cos A - sin A + 1) / (cos A + sin A - 1) = cosec A + cot A

उत्तर:

∵ LHS = (cos A - sin A + 1) / (cos A + sin A - 1)

⇒ अंश और हर को sin A से भाग देने पर:

⇒ = (cot A - 1 + cosec A) / (cot A + 1 - cosec A)

⇒ = (cot A + cosec A - 1) / (cot A - cosec A + 1)

⇒ सर्वसमिका $1 = \text{cosec}^2 A - \cot^2 A$ का प्रयोग अंश में करने पर:

⇒ = [(cot A + cosec A) - ($\text{cosec}^2 A - \cot^2 A$)] / (cot A - cosec A + 1)

⇒ = [(cot A + cosec A) - {(cosec A - cot A)(cosec A + cot A)}] / (cot A - cosec A + 1)

⇒ (cot A + cosec A) को उभयनिष्ठ लेने पर:

⇒ = (cot A + cosec A) [1 - (cosec A - cot A)] / (cot A - cosec A + 1)

⇒ = (cot A + cosec A) [1 - cosec A + cot A] / (cot A - cosec A + 1)

⇒ अंश और हर के पद [cot A - cosec A + 1] समान हैं, अतः कट जाएंगे:

⇒ = cot A + cosec A

∴ = RHS.

⇒ इति सिद्धम्

प्रश्न 33: सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर:

∵ माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जो वृत्त को P, Q, R, S पर स्पर्श करता है।

⇒ बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाओं की लंबाइयां बराबर होती हैं:

⇒ AP = AS (समीकरण 1)

⇒ BP = BQ (समीकरण 2)

⇒ CR = CQ (समीकरण 3)

⇒ DR = DS (समीकरण 4)

⇒ चारों को जोड़ने पर:

⇒ (AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)

⇒ AB + CD = AD + BC

⇒ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं (AB = CD और AD = BC)

⇒ AB + AB = BC + BC

⇒ 2AB = 2BC ⇒ AB = BC

⇒ चूँकि संलग्न भुजाएँ बराबर हैं, अतः AB = BC = CD = DA

∴ इसलिए,

⇒ **ABCD एक समचतुर्भुज है।**

खंड - D (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न - 5 अंक)

प्रश्न 34: भूमि के एक बिंदु से एक 20m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ **चरण 1: मानांकन (Assumptions)**

⇒ माना AB भवन है जिसकी ऊँचाई = 20 m

⇒ माना मीनार BC है जिसकी ऊँचाई = h m

⇒ भूमि पर बिंदु P से भवन की दूरी AP = x m

⇒ मीनार के तल का उन्नयन कोण = 45°

⇒ मीनार के शिखर का उन्नयन कोण = 60°

∵ **चरण 2: समकोण ΔPAB में**

⇒ tan 45° = लंब / आधार

⇒ tan 45° = AB / AP

⇒ 1 = 20 / x

⇒ ⇒ x = 20 m

∵ **चरण 3: समकोण ΔPAC में**

⇒ संपूर्ण लंब AC = AB + BC = (20 + h) m

⇒ tan 60° = AC / AP

⇒ √3 = (20 + h) / x

∵ **चरण 4: h का मान निकालना**

⇒ समीकरण में x = 20 रखने पर:

⇒ √3 = (20 + h) / 20

⇒ 20√3 = 20 + h

⇒ h = 20√3 - 20

⇒ h = 20(√3 - 1) m

∴ अतः संचार मीनार की ऊँचाई

⇒ **20(√3 - 1) m**

है।

अथवा (OR) प्रश्न 34: समुद्र तल से 75m ऊँचे लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ **चरण 1: मानांकन (Assumptions)**

⇒ माना लाइट हाउस की ऊँचाई AB = 75 m

⇒ माना दो जहाज C और D हैं। (C करीब है, D पीछे है)

⇒ अवनमन कोण 45° और 30° हैं, अतः एकांतर कोणों से उन्नयन कोण:

⇒ ∠ACB = 45° और ∠ADB = 30°

∵ **चरण 2: समकोण ΔABC में गणना**

⇒ tan 45° = AB / BC

⇒ 1 = 75 / BC

⇒ ⇒ BC = 75 m

∵ **चरण 3: समकोण ΔABD में गणना**

⇒ tan 30° = AB / BD

⇒ 1 / √3 = 75 / BD

⇒ ⇒ BD = 75√3 m

∵ **चरण 4: दोनों जहाजों के बीच की दूरी (CD)**

⇒ CD = BD - BC

⇒ CD = 75√3 - 75

⇒ CD = 75(√3 - 1) m

∴ अतः दोनों जहाजों के बीच की दूरी

⇒ **75(√3 - 1) m**

है।

प्रश्न 35: ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

∵ **चरण 1: दिए गए आयाम**

⇒ बेलन और शंकु की ऊँचाई $h = 2.4$ cm

⇒ व्यास $= 1.4$ cm, अतः त्रिज्या $r = 0.7$ cm

∵ **चरण 2: शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l)**

⇒ $l = \sqrt{[r^2 + h^2]}$

⇒ $l = \sqrt{[(0.7)^2 + (2.4)^2]}$

⇒ $l = \sqrt{[0.49 + 5.76]}$

⇒ $l = \sqrt{[6.25]} = 2.5$ cm

∵ **चरण 3: शेष ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA)**

⇒ TSA = बेलन का वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठ (गड्ढा)

⇒ $TSA = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl$

⇒ $TSA = \pi r\,[2h + r + l]$

∵ **चरण 4: मान प्रतिस्थापन एवं हल**

⇒ $TSA = (22/7) \times 0.7 \times [2(2.4) + 0.7 + 2.5]$

⇒ $TSA = 22 \times 0.1 \times [4.8 + 0.7 + 2.5]$

⇒ $TSA = 2.2 \times [8.0]$

⇒ $TSA = 17.6\ cm^2$

∴ निकटतम पूर्णांक (Rounding off) =

⇒ **$18\ cm^2$**

अथवा (OR) प्रश्न 35: ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान 8g लगभग होता है। ($\pi = 3.14$)

उत्तर:

∵ **चरण 1: बड़े (निचले) बेलन का आयतन (V_1)**

⇒ ऊँचाई H = 220 cm, व्यास = 24 cm ⇒ त्रिज्या R = 12 cm

⇒ $V_1 = \pi R^2 H$

⇒ $V_1 = 3.14 \times (12)^2 \times 220$

⇒ $V_1 = 3.14 \times 144 \times 220$

⇒ $V_1 = 99475.2\ cm^3$

∵ **चरण 2: छोटे (ऊपरी) बेलन का आयतन (V_2)**

⇒ ऊँचाई h = 60 cm, त्रिज्या r = 8 cm

⇒ $V_2 = \pi r^2 h$

⇒ $V_2 = 3.14 \times (8)^2 \times 60$

⇒ $V_2 = 3.14 \times 64 \times 60$

⇒ $V_2 = 12057.6\ cm^3$

∵ **चरण 3: स्तंभ का कुल आयतन (V)**

⇒ $V = V_1 + V_2$

⇒ $V = 99475.2 + 12057.6$

⇒ $V = 111532.8\ cm^3$

∵ **चरण 4: स्तंभ का कुल द्रव्यमान (Mass)**

⇒ 1 cm^3 का द्रव्यमान = 8 ग्राम

⇒ कुल द्रव्यमान = 111532.8 × 8

⇒ = 892262.4 ग्राम

⇒ किलोग्राम (kg) में = 892262.4 / 1000

∴ द्रव्यमान =

⇒ **892.26 kg**

प्रश्न 36 (अथवा): यदि दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए। (कुल बारंबारता 60 है)

उत्तर:

∵ **चरण 1: संचयी बारंबारता (cf) सारणी का निर्माण**

वर्ग अंतराल	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5 + x
20 - 30	20	25 + x
30 - 40	15	40 + x
40 - 50	y	40 + x + y
50 - 60	5	45 + x + y

∵ **चरण 2: समीकरणों का निर्माण**

⇒ कुल बारंबारता N = 60

⇒ अतः, 45 + x + y = 60

⇒ x + y = 15 ... (समीकरण 1)

∵ **चरण 3: माध्यक वर्ग की पहचान**

⇒ माध्यक 28.5 दिया है, जो 20-30 के बीच स्थित है।

⇒ अतः माध्यक वर्ग = 20-30

⇒ यहाँ L = 20, f = 20, cf = 5 + x, h = 10, N/2 = 30

∵ **चरण 4: सूत्र द्वारा x का मान**

⇒ माध्यक = $L + [(N/2 - cf) / f] \times h$

⇒ $28.5 = 20 + [(30 - (5 + x)) / 20] \times 10$

⇒ $28.5 - 20 = [(25 - x) / 20] \times 10$

⇒ $8.5 = (25 - x) / 2$

⇒ $17 = 25 - x$

⇒ $x = 25 - 17 = 8$

∵ **चरण 5: y का मान**

⇒ समीकरण 1 में $x = 8$ रखने पर:

⇒ $8 + y = 15 \Rightarrow y = 7$

∴ अतः

⇒ **$x = 8, y = 7$**

खंड - E (केस स्टडी प्रश्न - 4 अंक)

प्रश्न 37: (केस स्टडी - सुहानी और शगुन का घर)

Q1. सुहानी का घर शगुन के घर से कितनी दूरी पर है?

Q2. पुस्तकालय शगुन के घर से कितनी दूरी पर है?

Q3. सिद्ध कीजिए कि शगुन के लिए विद्यालय, सुहानी के घर और पुस्तकालय की तुलना में अधिक दूर है।

उत्तर:

∵ यह निर्देशांक ज्यामिति पर आधारित है। दूरी सूत्र $d = \sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]}$ का प्रयोग किया जाएगा।

⇒ (ग्राफ के निर्देशांक स्पष्ट होने पर मान सीधे रखे जा सकते हैं। मान लीजिए विद्यालय O(0,0), सुहानी $A(x_1, y_1)$, शगुन $B(x_2, y_2)$ और पुस्तकालय $C(x_3, y_3)$ है।)

∵ **Q1: सुहानी और शगुन के घर के बीच की दूरी:**

⇒ AB = $\sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$ मात्रक।

∵ **Q2: पुस्तकालय और शगुन के घर के बीच की दूरी:**

⇒ BC = $\sqrt{[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2]}$ मात्रक।

∵ **Q3: विद्यालय की शगुन से दूरी की तुलना:**

⇒ शगुन (B) की विद्यालय (O) से दूरी OB = $\sqrt{[x_2^2 + y_2^2]}$

⇒ इस OB की दूरी की तुलना AB और BC से करने पर, OB > AB तथा OB > BC प्राप्त होगा।

∴ अतः सिद्ध होता है कि विद्यालय अधिक दूर है।

प्रश्न 38: (केस स्टडी - पुल का ढांचा)
(i) BPT का प्रयोग करते हुए, DE द्वारा AB को विभाजित करने का अनुपात ज्ञात कीजिए।
(ii) यदि AC = 20cm है, तो AE तथा EC ज्ञात कीजिए।
(iii) यदि ΔADE ~ ΔABC है, तो DE / BC ज्ञात कीजिए (दिया है DE = 5cm)।

उत्तर:

∵ ΔABC में, DE || BC (दिया है)

∵ **(i) BPT का प्रयोग:**

⇒ BPT के अनुसार: AD / DB = AE / EC

⇒ अतः DE, AB को AD:DB के अनुपात में विभाजित करती है।

∵ **(ii) AE तथा EC का मान:**

⇒ यदि D, AB का मध्य बिंदु है, तो AD/DB = 1/1 होगा।

⇒ अतः AE/EC = 1/1 होगा (अर्थात E, AC का मध्य बिंदु है)।

⇒ AE = EC = AC / 2

⇒ AE = EC = 20 / 2

⇒ ⇒ **AE = 10 cm, EC = 10 cm**

∵ **(iii) DE / BC का मान:**

⇒ चूँकि ΔADE ~ ΔABC है, समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।

⇒ अतः DE / BC = AD / AB

⇒ मध्य बिंदु होने पर AD / AB = 1 / 2 होगा।

⇒ ⇒ DE / BC = 1 / 2

⇒ (यदि DE = 5 cm है, तो BC = 10 cm होगा)

∴ अनुपात

⇒ **DE / BC = 1 / 2**