हल सहित गणित (स्टैन्डर्ड) - MP Board Class 10 Model Paper 2026-27

हाई स्कूल परीक्षा | विषय कोड: गणित (Standard) | पूर्णांक: 75 अंक | समय: 3 घंटे

BestFunda Detailed Solution

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए (1 × 6 = 6 अंक)

(i) 144 के अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य गुणनखंडों की घातों का योग है:

चरण 1: 144 का अभाज्य गुणनखंडन करने पर:

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

चरण 2: अभाज्य गुणनखंडों की घातों का योग = 4 + 2 = 6

सही उत्तर: (d) 6

(ii) द्विघात बहुपद $x^2 + 5x + 7$ में शून्यकों के योग व गुणनफल का योग है:

तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर: $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -b/a = -5/1 = -5$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = c/a = 7/1 = 7$

योग व गुणनफल का कुल योग = $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -5 + 7 = 2$

सही उत्तर: (a) 2

(iii) बिन्दु (−3, −4) की x-अक्ष से दूरी है:

नियम: किसी बिन्दु (x, y) की x-अक्ष से लंबवत दूरी उसके कोटि के निरपेक्ष मान $|y|$ के बराबर होती है।

यहाँ $y = -4$, अतः दूरी = $|-4| = 4$

सही उत्तर: (c) 4

(iv) 4 और 6 का समांतर माध्य है:

समांतर माध्य सूत्र = $(a + b) / 2 = (4 + 6) / 2 = 10 / 2 = 5$

सही उत्तर: (c) 5

(v) द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x - 3\sqrt{2} = 0$ का विविक्तकर है:

यहाँ $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{5}$, $c = -3\sqrt{2}$

विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = (-\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{2})(-3\sqrt{2})$

$D = 5 - 4 \times (-3 \times 2) = 5 - 4 \times (-6) = 5 + 24 = 29$

सही उत्तर: (c) 29

(vi) समीकरण युग्म $3x + 4y = 6$ एवं $6x + 8y + 12 = 0$ के ग्राफ द्वारा निरूपित रेखाएँ परस्पर:

समीकरण 1: $3x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = -6$

समीकरण 2: $6x + 8y + 12 = 0 \Rightarrow a_2 = 6, b_2 = 8, c_2 = 12$

अनुपातों की तुलना: $a_1/a_2 = 3/6 = 1/2$; $b_1/b_2 = 4/8 = 1/2$; $c_1/c_2 = -6/12 = -1/2$

चूँकि $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, अतः रेखाएँ परस्पर **समांतर** हैं।

सही उत्तर: (b) समांतर है

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए (1 × 6 = 6 अंक)

(i) यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के **समांतर (Parallel)** होती है। (थेल्स प्रमेय का विलोम)

(ii) त्रिज्या r व कोण θ वाले वृत्त के चाप की लंबाई का सूत्र **$(\theta / 360°) \times 2\pi r$** (या $(\theta / 180°) \times \pi r$) है।

(iii) A.P.: 4, 6, 8, 10, ... का n वाँ पद: $a_n = a + (n - 1)d = 4 + (n - 1)2 = 4 + 2n - 2 =$ **$2n + 2$** है।

(iv) द्विघात समीकरण $3x^2 - 6x + k = 0$ के मूल बराबर हैं: $D = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(3)(k) = 0 \Rightarrow 36 - 12k = 0 \Rightarrow k =$ **3** है।

BESTFUNDA.COM

प्रश्न 3. निम्नलिखित के लिए सत्य / असत्य लिखिए (1 × 6 = 6 अंक)

(i) यदि दो समद्विबाहु त्रिभुजों के शीर्ष कोण समान हों, तो वह समरूप होते हैं।

उत्तर: सत्य [स्पष्टीकरण: दोनों समद्विबाहु त्रिभुजों में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं। शीर्ष कोण समान होने पर शेष दोनों कोण भी परस्पर बराबर होंगे, जिससे कोण-कोण-कोण (AAA) समरूपता कसौटी से दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।]

(ii) बिंदुओं (−3, 0) एवं (3, 0) को मिलाने वाले रेखा खण्ड का मध्य बिन्दु मूलबिन्दु होगा।

उत्तर: सत्य [स्पष्टीकरण: मध्य बिन्दु सूत्र = $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$ = ((−3 + 3)/2, (0 + 0)/2) = (0/2, 0/2) = (0, 0), जो कि मूलबिन्दु है।]

(iii) किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं व संगत जीवा से घिरे क्षेत्र को त्रिज्यखंड कहते हैं।

उत्तर: असत्य [स्पष्टीकरण: दो त्रिज्याओं और संगत *चाप* से घिरे क्षेत्र को त्रिज्यखंड कहते हैं; जीवा और चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्तखंड कहते हैं।]

(iv) किसी वृत्त पर स्थित एक बिन्दु पर दो स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं।

उत्तर: असत्य [स्पष्टीकरण: वृत्त की परिधि पर स्थित किसी एक बिंदु से केवल और केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।]

(v) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

उत्तर: सत्य [स्पष्टीकरण: स्पर्श रेखा की परिभाषा के अनुसार वह वृत्त को उभयनिष्ठ रूप से केवल एक ही स्पर्श बिंदु पर मिलती है।]

(vi) केंद्रीय प्रवृत्ति के तीनो मापकों में एक आनुभाविक संबंध "3 मध्यिका = माध्य + 2 बहुलक" है।

उत्तर: असत्य [स्पष्टीकरण: सही आनुभाविक सूत्र "3 माध्यक (मध्यिका) = बहुलक + 2 माध्य" होता है।]

प्रश्न 4. सही जोड़ी मिलाइए (1 × 6 = 6 अंक)

स्तंभ 'A' (प्रश्न)	स्तंभ 'B' (विकल्प)	सही मिलान एवं गणितीय व्याख्या
(i) ऐसी घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती	(f) 0	**0** (असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है)
(ii) cot 30° का मान	(e) √3	**√3** (चूँकि cot 30° = 1 / tan 30° = √3)
(iii) cosec 30° का मान	(a) 2	**2** (चूँकि sin 30° = 1/2, अतः cosec 30° = 2)
(iv) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ =	(b) 1	**1** (मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिका)
(v) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	(d) $2\pi rh$	**$2\pi rh$** (r = आधार त्रिज्या, h = ऊँचाई)
(vi) अर्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	(c) $3\pi r^2$	**$3\pi r^2$** (वक्र पृष्ठ $2\pi r^2$ + समतल आधार पृष्ठ πr^2)

प्रश्न 5. एक वाक्य / शब्द में उत्तर लिखिए (1 × 6 = 6 अंक)

(i) उन्नयन कोण की परिभाषा लिखिए।

उत्तर: जब कोई प्रेक्षक अपनी आँख के क्षैतिज स्तर से ऊपर स्थित किसी वस्तु को देखता है, तो प्रेक्षक की आँख को वस्तु से मिलाने वाली दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच बने कोण को **उन्नयन कोण** कहते हैं।

(ii) प्रथम पद a व सार्व अंतर d वाली समांतर श्रेणी के n पदों के योगफल का सूत्र लिखिए।

उत्तर: $S_n = (n/2)\,[2a + (n-1)d]$ (या $S_n = (n/2)[a + l]$)

(iii) एक सिक्के को तीन बार उछालने पर प्राप्त सभी संभव परिणामों की संख्या लिखिए।

उत्तर: 8 (सूत्र: $2^3 = 8$; परिणाम: {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT})

(iv) बिन्दु (a, b) की मूलबिंदु से दूरी का मान लिखिए।

उत्तर: मूलबिंदु (0, 0) से दूरी = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$

(v) वृत्त की छेदक रेखा की परिभाषा लिखिए।

उत्तर: वह सरल रेखा जो किसी वृत्त को दो भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, उसे वृत्त की **छेदक रेखा (Secant)** कहते हैं।

(vi) आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय) का कथन लिखिए।

उत्तर: यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

प्रश्न 6. वास्तविक संख्याएँ (अंक: 2)

प्रश्न: HCF (156, 132) = 12 दिया है। LCM (156, 132) ज्ञात कीजिए।

दिया है: पहली संख्या (a) = 156, दूसरी संख्या (b) = 132, HCF = 12
सूत्र: HCF × LCM = दो संख्याओं का गुणनफल $(a \times b)$
⇒ 12 × LCM = 156 × 132
⇒ LCM = (156 × 132) / 12
⇒ LCM = 156 × 11 = 1716
अतः LCM (156, 132) = 1716

अथवा / OR

प्रश्न: समझाइए कि 7 × 11 × 13 + 13 एक भाज्य संख्या क्यों है?

हल: दी गई संख्या = 7 × 11 × 13 + 13
दोनों पदों में से 13 उभयनिष्ठ (common) लेने पर:
= 13 × (7 × 11 + 1)
= 13 × (77 + 1)
= 13 × 78 = 13 × (2 × 3 × 13) = $2 \times 3 \times 13^2$
निष्कर्ष: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार, दी गई संख्या को 1 और स्वयं के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखंडों (2, 3 तथा 13) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
अतः 7 × 11 × 13 + 13 एक भाज्य संख्या (Composite Number) है।

प्रश्न 7. समांतर श्रेढ़ी (अंक: 2)

प्रश्न: A.P.: 4, 9, 14, 19, ... का कौन सा पद 124 है?

हल: दी गई A.P. में: प्रथम पद (a) = 4, सार्व अंतर (d) = 9 − 4 = 5
माना A.P. का n वाँ पद 124 है। अतः a_n = 124
सूत्र: $a_n = a + (n-1)d$
⇒ 124 = 4 + $(n-1)$ × 5
⇒ 124 − 4 = $(n-1)$ × 5 ⇒ 120 = $(n-1)$ × 5
⇒ $n - 1$ = 120 / 5 = 24 ⇒ n = 24 + 1 = 25
अतः दी गई A.P. का 25वाँ पद 124 है।

अथवा / OR

प्रश्न: A.P.: 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

हल: यहाँ a = 3, d = 15 − 3 = 12
माना n वाँ पद 54वें पद से 132 अधिक है।
प्रश्नानुसार: $a_n = a_{54} + 132$
⇒ $a + (n-1)d = [a + 53d] + 132$
दोनों पक्षों से a निरस्त करने पर: $(n-1)d - 53d = 132$
⇒ $(n - 1 - 53) \times 12 = 132 \Rightarrow (n - 54) = 132 / 12 = 11$
⇒ n = 54 + 11 = 65
अतः A.P. का 65वाँ पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा।

प्रश्न 8. बहुपद के शून्यक एवं संबंध (अंक: 2)

प्रश्न: द्विघात बहुपद $2x^2 + x - 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल: बहुपद: $P(x) = 2x^2 + x - 6$
मध्य पद विभक्त करने पर: गुणा = 2 × (−6) = −12, योग = +1 ⇒ संख्याएँ +4 व −3 हैं।

प्रश्न 9. द्विघात बहुपद की रचना (अंक: 2)

प्रश्न: एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 2/3 और 3/4 है।

हल: दिया है: शून्यकों का योग (S) = 2/3, शून्यकों का गुणनफल (P) = 3/4

द्विघात बहुपद का मानक सूत्र: $K\,[x^2 - Sx + P]$

$= K\,[x^2 - (2/3)x + (3/4)]$

हरों 3 और 4 का LCM = 12 लेने पर: $K\,[(12x^2 - 8x + 9) / 12]$

$K = 12$ रखने पर: $= 12x^2 - 8x + 9$

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $12x^2 - 8x + 9$ है।

अथवा / OR

प्रश्न: एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक 5 और −7 हैं।

हल: माना शून्यक $\alpha = 5$ तथा $\beta = -7$ हैं।

शून्यकों का योग: $S = \alpha + \beta = 5 + (-7) = -2$

शून्यकों का गुणनफल: $P = \alpha\beta = 5 \times (-7) = -35$

द्विघात बहुपद सूत्र: $x^2 - Sx + P$

$= x^2 - (-2)x + (-35) = x^2 + 2x - 35$

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $x^2 + 2x - 35$ है।

प्रश्न 10. दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म (अंक: 2)

प्रश्न: रैखिक समीकरण युग्म $8x + 5y = 9$ एवं $3x + 2y = 4$ को हल कीजिए।

समीकरण (1): $8x + 5y = 9$; समीकरण (2): $3x + 2y = 4$

विलोपन विधि: समीकरण (1) में 2 से तथा समीकरण (2) में 5 से गुणा करने पर:

$16x + 10y = 18$ ... (3)

$15x + 10y = 20$ ... (4)

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर: $(16x - 15x) = 18 - 20 \Rightarrow x = -2$

$x = -2$ समीकरण (2) में रखने पर: $3(-2) + 2y = 4 \Rightarrow -6 + 2y = 4$

$\Rightarrow 2y = 4 + 6 = 10 \Rightarrow y = 5$

अतः अभीष्ट हल: $x = -2$ और $y = 5$

अथवा / OR

प्रश्न: दो रेल पटरियाँ, समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। क्या रेल पटरियाँ एक दूसरे को काटेंगी?

समीकरण 1: $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -4$

समीकरण 2: $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, $c_2 = -12$

अनुपातों की तुलना: $a_1/a_2 = 1/2$; $b_1/b_2 = 2/4 = 1/2$; $c_1/c_2 = (-4)/(-12) = 1/3$

चूँकि $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, अतः रेखाएँ परस्पर **समांतर** हैं।

निष्कर्ष: चूँकि रेखाएँ समांतर हैं, अतः रेल पटरियाँ एक दूसरे को कभी नहीं काटेंगी।

प्रश्न 11. वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल (अंक: 2)

प्रश्न: एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 cm है।

माना वृत्त की त्रिज्या r है। दिया है: परिधि $= 2\pi r = 22$ cm

$\Rightarrow 2 \times (22/7) \times r = 22 \Rightarrow r = (22 \times 7) / (2 \times 22) = 7/2$ cm $= 3.5$ cm

वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= (1/4)\,\pi r^2$

$= (1/4) \times (22/7) \times (7/2) \times (7/2) = (11 \times 7) / (4 \times 2) = 77 / 8$ cm$^2 = 9.625$ cm^2

अतः चतुर्थांश का क्षेत्रफल $77/8$ cm^2 (या 9.625 cm^2) है।

BESTFUNDA.COM

प्रश्न 12. समरूप त्रिभुज प्रमेय एवं अनुप्रयोग (अंक: 2)

प्रश्न: लंबाई 6 m वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: एक ही समय पर सूर्य का उन्नयन कोण समान रहता है।
अतः स्तंभ तथा उसकी छाया द्वारा बना त्रिभुज, मीनार तथा उसकी छाया द्वारा बने त्रिभुज के **समरूप** होगा (AA समरूपता)।
समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं:
(स्तंभ की ऊँचाई) / (मीनार की ऊँचाई) = (स्तंभ की छाया) / (मीनार की छाया)
$\Rightarrow 6 / H = 4 / 28 \Rightarrow 6 / H = 1 / 7 \Rightarrow H = 6 \times 7 = 42$ m
अतः मीनार की अभीष्ट ऊँचाई 42 मीटर है।

अथवा / OR

प्रश्न: दी गई आकृति में, DE || BC और AD = 2 cm, DB = 3 cm एवं AE = 5 cm तो EC ज्ञात कीजिए।

हल: △ABC में, DE || BC दिया है।
आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय) के अनुसार:
AD / DB = AE / EC
दिए गए मान रखने पर: 2 / 3 = 5 / EC
$\Rightarrow 2 \times EC = 3 \times 5 \Rightarrow 2 \times EC = 15$
$\Rightarrow EC = 15 / 2 = 7.5$ cm
अतः EC का मान = 7.5 cm

प्रश्न 13. निर्देशांक ज्यामिति (अंक: 2)

प्रश्न: x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (2, −5) और (−2, 9) से समदूरस्थ हैं।

हल: माना x-अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिंदु P(x, 0) है।
बिंदु A(2, −5) और B(−2, 9) से समदूरस्थ होने के कारण: PA = PB $\Rightarrow PA^2 = PB^2$
दूरी सूत्र से: $(x - 2)^2 + (0 - (-5))^2 = (x - (-2))^2 + (0 - 9)^2$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + 5^2 = (x + 2)^2 + (-9)^2$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 81$
$\Rightarrow -4x + 29 = 4x + 85 \Rightarrow -8x = 85 - 29 = 56 \Rightarrow x = 56 / (-8) = -7$
अतः x-अक्ष पर अभीष्ट बिंदु (−7, 0) है।

अथवा / OR

प्रश्न: उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं (−1, 7) और (4, −3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है।

यहाँ $(x_1, y_1) = (-1, 7)$, $(x_2, y_2) = (4, -3)$ तथा अनुपात $m_1 : m_2 = 2 : 3$
विभाजन सूत्र: $x = (m_1x_2 + m_2x_1) / (m_1 + m_2)$
$\Rightarrow x = [2(4) + 3(-1)] / (2 + 3) = [8 - 3] / 5 = 5 / 5 = 1$
$y = (m_1y_2 + m_2y_1) / (m_1 + m_2)$
$\Rightarrow y = [2(-3) + 3(7)] / (2 + 3) = [-6 + 21] / 5 = 15 / 5 = 3$
अतः अभीष्ट बिंदु के निर्देशांक (1, 3) हैं।

प्रश्न 14. त्रिकोणमिति अनुपात एवं सर्वसमिका (अंक: 2)

प्रश्न: यदि 15 cot A = 8, तो sin A और sec A का मान ज्ञात कीजिए।

दिया है: cot A = 8 / 15 = आधार / लंब
माना आधार = $8k$, लंब = $15k$। पाइथागोरस प्रमेय से:
कर्ण = $\sqrt{[(\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2]} = \sqrt{[(15k)^2 + (8k)^2]} = \sqrt{[225k^2 + 64k^2]} = \sqrt{(289k^2)} = 17k$
sin A = लंब / कर्ण = $15k / 17k = 15 / 17$

प्रश्न 15. वृत्त एवं स्पर्श रेखा प्रमेय (अंक: 2)

प्रश्न: वृत्त के केंद्र से 5 cm दूरी पर स्थित एक बिंदु A से स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना वृत्त का केंद्र O है और P स्पर्श बिंदु है। अतः OP त्रिज्या और AP स्पर्श रेखा है।
प्रमेय से: स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है, अतः $\angle OPA = 90°$।
समकोण $\triangle OPA$ में पाइथागोरस प्रमेय लगाने पर: $OA^2 = OP^2 + AP^2$
$\Rightarrow 5^2 = OP^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = OP^2 + 16$
$\Rightarrow OP^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OP = \sqrt{9} = 3$ cm
अतः वृत्त की त्रिज्या = 3 cm

अथवा / OR

प्रश्न: दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm और 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है।

हल: माना O दोनों वृत्तों का उभयनिष्ठ केंद्र है और AB बड़े वृत्त की वह जीवा है जो छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करती है।
अतः $OP \perp AB$ और केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है ($AP = PB$)।
यहाँ $OA = 5$ cm (बड़े वृत्त की त्रिज्या), $OP = 3$ cm (छोटे वृत्त की त्रिज्या)।
समकोण $\triangle OPA$ में: $OA^2 = OP^2 + AP^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + AP^2$
$\Rightarrow AP^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AP = 4$ cm
जीवा की कुल लंबाई $AB = 2 \times AP = 2 \times 4 = 8$ cm
अतः बड़े वृत्त की अभीष्ट जीवा की लंबाई 8 cm है।

प्रश्न 16. प्रायिकता - ताश एवं पेन संबंधी (अंक: 2)

प्रश्न: 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। लाल रंग का बादशाह प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

कुल संभव परिणामों की संख्या $n(S) = 52$
गड्डी में लाल रंग के बादशाहों की संख्या (पान का बादशाह + ईंट का बादशाह) = 2
अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 2$
प्रायिकता सूत्र: $P(E) = n(E) / n(S) = 2 / 52 = 1 / 26$
अतः लाल रंग का बादशाह प्राप्त करने की प्रायिकता = 1/26

अथवा / OR

प्रश्न: किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। इस मिश्रण में से एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

खराब पेनों की संख्या = 12 ; अच्छे पेनों की संख्या = 132
पेनों की कुल संख्या $n(S) = 12 + 132 = 144$
अच्छा पेन प्राप्त होने की अनुकूल संख्या $n(E) = 132$
प्रायिकता $P(\text{अच्छा पेन}) = n(E) / n(S) = 132 / 144$
अंश और हर को 12 से विभाजित करने पर: $= 11 / 12$
अतः निकाले गए पेन के अच्छा होने की प्रायिकता = 11/12

प्रश्न 17. प्रायिकता - डिस्क एवं गेंद संबंधी (अंक: 2)

प्रश्न: एक बॉक्स में 90 डिस्क हैं जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। एक डिस्क यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उस पर एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

कुल संभव परिणामों की संख्या $n(S) = 90$
1 से 90 के बीच पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}
अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 9$
प्रायिकता $P(\text{पूर्ण वर्ग संख्या}) = n(E) / n(S) = 9 / 90 = 1 / 10$
अतः पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता = 1/10

BESTFUNDA.COM

प्रश्न 18. द्विघात समीकरण अनुप्रयोग एवं गुणनखंड (अंक: 3)

प्रश्न: एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना समकोण त्रिभुज का आधार = x cm
तब त्रिभुज की ऊँचाई (लंब) = $(x - 7)$ cm ; दिया है: कर्ण = 13 cm
पाइथागोरस प्रमेय से: (कर्ण)^2 = (आधार)^2 + (ऊँचाई)^2
$\Rightarrow 13^2 = x^2 + (x - 7)^2$
$\Rightarrow 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$
$\Rightarrow 2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0$
समीकरण को 2 से भाग देने पर: $x^2 - 7x - 60 = 0$
मध्य पद विभक्त करने पर: $x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$
$\Rightarrow x(x - 12) + 5(x - 12) = 0 \Rightarrow (x - 12)(x + 5) = 0$
$\Rightarrow x = 12$ या $x = -5$ (चूँकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती, अतः $x = 12$)
आधार = 12 cm तथा ऊँचाई = 12 − 7 = 5 cm
अतः त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ 12 cm और 5 cm हैं।

अथवा / OR

प्रश्न: द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल: समीकरण: $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
गुणा = $\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 5 \times 2 = 10$; योग = $7 \Rightarrow$ संख्याएँ 5 और 2 हैं।
$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$
$\Rightarrow \sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 5(x + \sqrt{2}) = 0$
$\Rightarrow (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x + 5) = 0$
यदि $x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$
यदि $\sqrt{2}x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 / \sqrt{2}$ (या परिमेयकरण पर $-5\sqrt{2} / 2$)
अतः समीकरण के मूल $-\sqrt{2}$ और $-5/\sqrt{2}$ हैं।

प्रश्न 19. त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग (ऊँचाई एवं दूरी) (अंक: 3)

प्रश्न: 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना AB = 7 m भवन है और CD केबल टॉवर है। A से CD पर लंब AE खींचा।
तब ED = AB = 7 m तथा माना टॉवर के शेष भाग CE = h m। भवन और टॉवर की बीच की दूरी BD = AE = x m।
समकोण △ABD में: tan 45° = AB / BD $\Rightarrow$ 1 = 7 / $x \Rightarrow x$ = 7 m (अतः AE = 7 m)
समकोण △AEC में: tan 60° = CE / AE $\Rightarrow \sqrt{3} = h / 7 \Rightarrow h = 7\sqrt{3}$ m
टॉवर की कुल ऊँचाई CD = CE + ED = $7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1)$ m
($\sqrt{3} = 1.732$ रखने पर: $7 \times 2.732 = 19.124$ m)
अतः केबल टॉवर की ऊँचाई $7(\sqrt{3} + 1)$ मीटर (या 19.12 m) है।

अथवा / OR

प्रश्न: भूमि के एक बिंदु से 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना AB भवन की ऊँचाई = 20 m तथा इसके ऊपर स्थित संचार मीनार BC = h m है। भूमि पर प्रेक्षण बिंदु P है।
समकोण △PAB में: tan 45° = AB / PA $\Rightarrow$ 1 = 20 / PA $\Rightarrow$ PA = 20 m
समकोण △PAC में: tan 60° = AC / PA = (AB + BC) / PA
$\Rightarrow \sqrt{3} = (20 + h) / 20 \Rightarrow 20\sqrt{3} = 20 + h$
$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1)$ m
($\sqrt{3} = 1.732$ रखने पर: $20 \times 0.732 = 14.64$ m)

प्रश्न 20. अपरिमेयता एवं अंकगणित आधारभूत प्रमेय (अंक: 3)

प्रश्न: सिद्ध कीजिए कि 3 + 2√5 एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति: इसके विपरीत माना कि 3 + 2√5 एक परिमेय संख्या है।

अतः हम सह-अभाज्य पूर्णांक a और b ($b \neq 0$) प्राप्त कर सकते हैं कि: $3 + 2\sqrt{5} = a / b$

$\Rightarrow 2\sqrt{5} = (a / b) - 3 \Rightarrow 2\sqrt{5} = (a - 3b) / b$

$\Rightarrow \sqrt{5} = (a - 3b) / (2b)$

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, अतः $(a - 3b) / (2b)$ एक परिमेय संख्या है। इससे सिद्ध होता है कि √5 भी एक परिमेय संख्या है।

परंतु यह इस सर्वविदित तथ्य का विरोधाभास है कि √5 एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ है।

अतः 3 + 2√5 एक अपरिमेय संख्या है। (इति सिद्धम्)

अथवा / OR

प्रश्न: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है?

हल: कोई प्राकृत संख्या अंक 0 पर समाप्त तब होती है जब उसके अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य संख्या 2 और 5 दोनों अनिवार्य रूप से उपस्थित हों (अर्थात 2 × 5 = 10 का गुणज हो)।

यहाँ 6^n का अभाज्य गुणनखंडन = $(2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता के अनुसार, 6^n के अभाज्य गुणनखंडों में केवल 2 और 3 ही हैं और अभाज्य गुणनखंड 5 इसमें नहीं आ सकता।

अतः किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n कभी भी अंक 0 पर समाप्त नहीं हो सकती।

प्रश्न 21. दो चर वाले रैखिक समीकरण अनुप्रयोग (अंक: 4)

प्रश्न: यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह 9/11 हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह 5/6 हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल: माना भिन्न का अंश = x तथा हर = y है। तब भिन्न = x / y

प्रथम शर्त से: $(x + 2) / (y + 2) = 9 / 11 \Rightarrow 11(x + 2) = 9(y + 2) \Rightarrow 11x + 22 = 9y + 18 \Rightarrow 11x - 9y = -4$ ... (1)

द्वितीय शर्त से: $(x + 3) / (y + 3) = 5 / 6 \Rightarrow 6(x + 3) = 5(y + 3) \Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15 \Rightarrow 6x - 5y = -3$ ... (2)

समीकरण (1) को 5 से तथा (2) को 9 से गुणा कर घटाने पर: $(55x - 54x) = -20 - (-27) \Rightarrow x = 7$

x का मान (1) में: $11(7) - 9y = -4 \Rightarrow 77 + 4 = 9y \Rightarrow 9y = 81 \Rightarrow y = 9$

अतः अभीष्ट भिन्न 7/9 है।

अथवा / OR

प्रश्न: दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

माना दहाई का अंक = x तथा इकाई का अंक = y। मूल संख्या = $10x + y$

प्रथम शर्त से: $x + y = 9$ ... (1)

अंक पलटने पर प्राप्त संख्या = $10y + x$

द्वितीय शर्त से: $9(10x + y) = 2(10y + x) \Rightarrow 90x + 9y = 20y + 2x \Rightarrow 88x = 11y \Rightarrow y = 8x$ ... (2)

y का मान (1) में रखने पर: $x + 8x = 9 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 8(1) = 8$

मूल संख्या = 10(1) + 8 = 18

अतः अभीष्ट संख्या 18 है।

प्रश्न 22. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन (अंक: 4)

प्रश्न: कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14 cm है और कुल ऊँचाई 13 cm है। बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अर्धगोले व बेलन की उभयनिष्ठ त्रिज्या (r) = 14 / 2 = 7 cm

अर्धगोले की गहराई = त्रिज्या = 7 cm $\Rightarrow$ बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = 13 − 7 = 6 cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = (बेलन का वक्र पृष्ठ) + (अर्धगोले का वक्र पृष्ठ)